ANALÝZA KAPITÁLOVÉHO TRHU POMOCÍ STOCHASTICKÉ DOMINANCE A VÍCEKRITERIÁLNÍ INTERAKTIVNÍ METODY

Adam Borovička*

Úvod

V příspěvku můžeme nalézt dvě poslání. První je tvořeno souhrnem základních myšlenek dříve vyvinutého konceptu stochastické dominance a interaktivní metodou vícekriteriálního programování, která je kombinací víceméně známých přístupů. V druhé části se pak zabýváme praktickým uplatněním popsaných postupů na kapitálovém trhu při tvorbě investičního portfolia podílových fondů[1], což lze chápat jako hlavní přínos příspěvku.

Jelikož je investor vystaven poměrně velkému množství investičních instrumentů, koncept stochastické dominance přispěje k redukci možných investičních příležitostí, tedy dojde ke stanovení užší skupiny podílových fondů, které mohou potenciálně tvořit výsledné investiční portfolio. Jelikož bereme v potaz stochastický charakter zkoumaného problému, uvažujeme při výstavbě portfolia několik scénářů. Stanovení definitivní struktury podílových listů[2] probíhá pomocí interaktivní metody vícekriteriálního programování, tedy s aktivní participací potenciálního investora na výsledné skladbě investice během celého procesu.

1. Představení problému

Potenciální investor se rozhoduje část svých volných peněžních prostředků vložit do otevřených podílových fondů[3]. Jelikož je dlouholetým klientem České spořitelny, rozhodl se pro investici do otevřených podílových fondů Investiční společnosti České spořitelny. Jednoho dne se tedy vydal na jednu z poboček banky za investičním poradcem, aby s ním prodiskutoval možnosti investice.

* Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky (adam.borovicka@vse.cz).
Článek vznikl s podporou projektu IGA F4/16/2011 *Modely operačního a finančního managementu.*

1 *Podílový fond* je vnitřní organizační jednotka investiční společnosti bez právní subjektivity (Valach, 2006).

2 *Podílový list* je cenný papír, který představuje podíl podílníka na majetku podílového fondu a se kterým jsou spojena další práva vyplývající se zákona (zákon ÚZ č. 851, 2011).

3 *Otevřený podílový fond* je takový fond, jehož spravující investiční společnost je povinna podílové listy na žádost podílníka odkoupit do určitého termínu za aktuální hodnotu majetku fondu připadající na jeden podílový list (Veselá, 2011).

Investor vybírá ze čtyř skupin podílových fondů, a to *smíšených*, *dluhopisových*, *akciových* a fondů *peněžního trhu*. V nabídce Investiční společnosti České spořitelny jsou v těchto skupinách následující fondy (tabulka 1).

Tabulka 1
Nabídka otevřených podílových fondů České spořitelny

Fondy peněžního trhu	Smíšené fondy	Dluhopisové fondy	Akciové fondy
Sporoinvest	*Osobní portfolio 4 Plus* *Fond řízených výnosů* *Konzervativní MIX* *Vyvážený MIX* *Dynamický MIX* *Akciový MIX*	*Sporobond* *Trendbond* *Bondinvest* *Korporátní dluhopisový* *High Yield dluhopisový*	*Sporotrend* *Global Stocks* *Top Stocks*

Pramen: Internetové stránky Investiční společnosti České spořitelny[4].

Cílem investora je sestavit takové portfolio, které by splňovalo jeho požadavky na něj kladené. K tomuto účelu využijeme koncept stochastické dominance a interaktivní metodu vícekriteriálního programování teoreticky popsané v následující části.

2. Koncept stochastické dominance[5]

Princip stochastické dominance umožňuje alternativní přístup k měření (pojetí) rizika v rozhodovacích procesech, které se mnohdy neobejdou bez přítomnosti stochastických prvků.

Pro následující účely definujeme *n* náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (např. výnosy), které mohou nabývat různých hodnot *x*. V případě povědomosti o distribuční funkci jednotlivých proměnných $F_i(x)$ říkáme, že X_1 *stochasticky dominuje* X_2, jestliže platí buď

$$\forall x \quad F_1(x) \leq F_2(x) \tag{1}$$

vyjadřující první stupeň stochastické dominance, nebo

$$\forall x \quad \int_{-\infty}^{x} F_1(y)dy \leq \int_{-\infty}^{x} F_2(y)dy \tag{2}$$

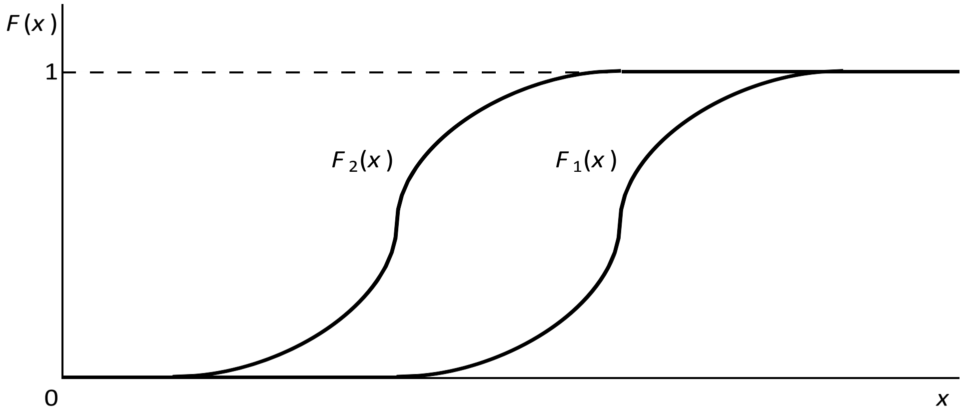
popisující druhý stupeň stochastické dominace (Zelený, 2005 či Ley, 2010). Je třeba zdůraznit, že v dalším průběhu článku se zaměříme na stochastickou dominanci prvního řádu, s konceptem stochastické dominance vyšších řádů se můžeme blíže seznámit například v publikacích (Ley, 2010, Rachev, 2008 nebo Mlynarovič, 2001).

4 Portál http://www.iscs.cz, 2012.

5 Celá tato kapitola je čerpána z publikace (Zelený, 2005). Případné další zdroje budou řádně citovány.

Pro ilustraci zobrazíme na následujícím grafu (obrázek 1) první stupeň stochastické dominance. Pokud X_1 dominuje X_2, racionální rozhodovatel vybírá méně riskantní variantu X_1, bez ohledu na její charakteristiku variability. Je třeba doplnit, že chování rozhodovatele v obou níže zmíněných případech je bráno čistě ilustrativně v duchu představovaného konceptu vnímání rizika.

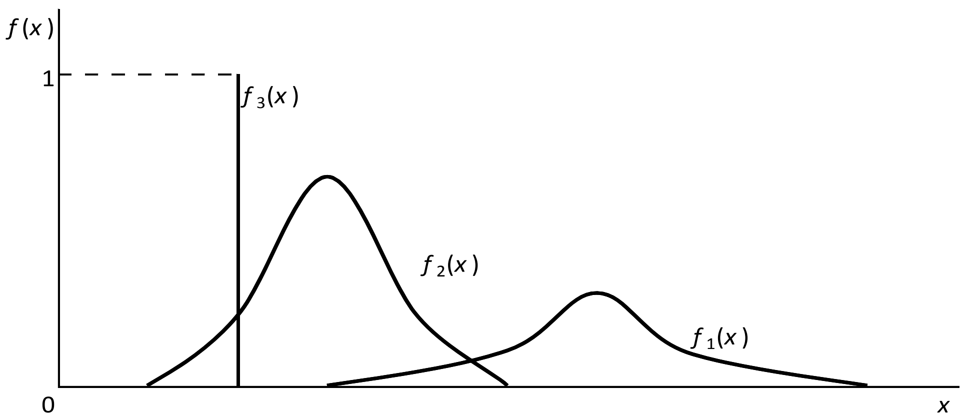
Obrázek 1
Veličina X_1 stochasticky dominuje veličinu X_2



Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel.

Na dalším grafu (obrázek 2) se podíváme na příklad problému rizikovosti z pohledu hustot pravděpodobnosti příslušných veličin.

Obrázek 2
Veličiny X_2 a X_3 jsou stochasticky dominovány veličinou X_1



Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel.

Při pohledu na riziko optikou stochastické dominance veličiny X_2 a X_3 jsou stochasticky dominovány proměnnou X_1, ač vykazuje nejvyšší variabilitu. Tedy rozhodovatel volí takovou alternativu, u které je pravděpodobnost nenabytí předem stanovené hodnoty náhodné veličiny nejmenší. Je tedy zřejmé, že pravděpodobnostní rozdělení s největším rozptylem stochasticky dominuje ostatní.

2.1 Aplikace principu stochastické dominance

Zavedeme množinu nezávislých proměnných výnosů x_i spojených s určitými investičními instrumenty *i*, kde *i* = 1, 2, …, *n*. Pro každou náhodnou veličinu X_i vyjadřující výnos *i-té* investiční příležitosti je pro hodnoty x_i definován předem stanovený interval, tedy

$$x_i \in \langle a_i ; b_i \rangle \subseteq \langle a ; b \rangle, \tag{3}$$

kde $\langle a;b \rangle$ je interval, do kterého spadají všechny hodnoty *x*. Obecně jej můžeme rozšířit na celý obor reálných čísel.

Označme si $f_i(x)$, $F_i(x)$, $\overline{x_i}$ a σ_i popořadě jako hustotu pravděpodobnosti, distribuční funkci, střední hodnotu a směrodatnou odchylku proměnných výnosů *i-tého* investičního instrumentu.

Dle (Mlynarovič, 2001 a Zelený, 2005) v porovnání dvou množin proměnných výnosů můžeme vyjádřit vztah stochastické dominance prvního řádu jako

$$1 \succ 2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_1(x) \le F_2(x) \quad pro\, všechna\, x \in \langle a,b \rangle \\ a \\ F_1(x) < F_2(x) \quad pro\, některá\, x \in \langle a,b \rangle \end{Bmatrix}, \tag{4}$$

kde $\succ$ označuje výraz "stochasticky dominuje" a $\Leftrightarrow$ vyjadřuje "právě tehdy". Tedy investor v duchu popsaného principu preferuje investiční instrument 1 s výnosy vyjádřené náhodnou veličinou X_1 před investicí 2 (X_2) .

Pravidlo zajišťující první stupeň stochastické dominance je velmi citlivé na nízké výnosy. V tomto duchu mohou být velmi snadno odmítnuty investiční instrumenty s nízkými výnosy. Je tedy vyžadováno takové opatření, které by nežádoucí jev napravovalo. Navrhujeme tedy určité přiměřené hypotézy racionálního chování, které budou formulovány prostřednictvím konkrétních pravidel.

Rozhodovací pravidlo č. 1

Investiční instrument 1 bude preferován před investičním instrumentem 2, jestliže minimální dosažitelná úroveň výnosu u investice 1 a_1 je větší než minimální dosažitelná úroveň výnosu u instrumentu 2 a_2 . Platí tedy

$$a_1 > a_2 \Rightarrow 1 \succ 2. \tag{5}$$

Investor většinou stanovuje minimální úroveň požadovaného výnosu. Tuto hladinu pro *m-tého* investora označíme jako r_m. Poté můžeme psát první minimalizační účelovou funkci

$$R_{im}^{(1)} = P_i(X < t_m) = P_i(X < \max\{L; r_m\} = P_i\left(X < \max\left\{\max_i a_i, r_m\right\}\right), \tag{6}$$

kde $R_{im}^{(1)}$ reprezentuje první komponentu rizikovosti R_i, t_m je individuální efektivní prahová hodnota spojená s výnosem a L označuje nejvyšší hodnotu z minimálních úrovní požadovaných výnosů u jednotlivých investičních variant. Jak je vidno, t_m je větší z popsaných hodnot L a minimální úrovně požadovaného výnosu r_m.

Optikou výše zmíněného vztahu nejméně riziková investiční příležitost je taková, u které je zajištěna nejmenší pravděpodobnost, že realizovaný výnos nabude hodnot menších než individuální efektivní prahová hodnota výnosu t_m stanovená výše.

Rozhodovací pravidlo č. 2

Investiční instrument 1 bude preferován před investičním instrumentem 2, jestliže maximální dosažitelná úroveň výnosu u investice 1 b_1 je větší než maximální dosažitelná úroveň výnosu u instrumentu 2 b_2. Platí tedy

$$b_1 > b_2 \Rightarrow 1 \succ 2. \tag{7}$$

Můžeme stanovit druhou účelovou funkci

$$1 - R_i^{(2)} = P_i(X \geq S), \tag{8}$$

kde $S = \max_i b_i$.

Výraz $(1 - R_i^{(2)})$ maximalizujeme, popř. minimalizujeme $R_i^{(2)}$, což reprezentuje druhou část rizikové složky. Z pohledu druhé minimalizační kriteriální funkce platí, že nejméně riziková investiční alternativa je taková, která minimalizuje pravděpodobnost nerealizování nejlepší úrovně výnosu.

Jak jsme tedy popsali, riziko se skládá v tomto konceptu ze dvou dimenzí. Celkové riziko *i-té* investice vyjádříme dvousložkovým vektorem $R_i = (R_{im}^{(1)}, R_i^{(2)})$. Obě komponenty a jejich simultánní uvažování při analýze rizika je plně konzistentní s konceptem prvního stupně stochastické dominance. Jinými slovy, investor aplikující stochastickou dominanci nemůže vybrat takovou alternativu, která by byla v rozporu s rizikem R_i.

Nyní prezentujeme třetí pravidlo racionální chování, které je založeno na znalosti očekávané hodnoty výnosů.

Rozhodovací pravidlo č. 3

Investice 1 bude preferována před investicí 2, jestliže očekávaná hodnota výnosu první investice $\overline{x_1}$ je větší než očekávaná hodnota výnosu investice druhé $\overline{x_2}$. Formálně zapsáno

$$\overline{x_1} > \overline{x_2} \Rightarrow 1 \succ 2. \tag{9}$$

Pokud se dostaneme do situace rizikové indiference mezi oběma alternativami, pak se můžeme plně spolehnout na ukazatel očekávaného výnosu.

Nyní sestavíme vektor ze třech výše definovaných účelových funkcí pro *i-tý* investiční instrument a *m-tého* investora, který budeme nazývat *klasifikační vektor portfolia*[6]

$$PRV_{im} = (1 - R_{im}^{(1)}, \overline{x_i}, 1 - R_i^{(2)}). \tag{10}$$

Je čas definovat nedominovanou variantu v souvislosti se složkami klasifikačního vektoru. *Nedominovaná* varianta je taková dostupná varianta, u které není možné zvýšit jednu z komponent výše zmíněného vektoru bez snížení alespoň jedné z ostatních. Všechny nedominované varianty tvoří množinu nedominovaných variant. Ideální variantou rozumíme takovou, která bude nabývat maximálních hodnot všech tří komponent vektoru. Jelikož většinou tato varianta není dosažitelná, snažíme se zvolit takovou nedominovanou variantu, která bude ideální alternativě co možná nejblíže.

V případě znalosti střední hodnoty $\overline{x_i}$ a směrodatné odchylky σ_i všech pravděpodobnostních rozdělení, můžeme modifikovat výpočet hodnot L, S a tedy i t_m. Podstata určení bude ve vzdálenosti od průměru vyjádřená směrodatnou odchylkou multiplikovanou konstantou k, resp. k'. Tedy

$$\begin{aligned} L &= \max_i(\overline{x_i} - k'\sigma_i), \\ S &= \max_i(\overline{x_i} + k\sigma_i), \\ t_m &= \max(L; r_m), \end{aligned} \tag{11}$$

kde k' a k jsou konstanty volené rozhodovatelem, které mohou být stanoveny na nulové úrovni či z praktického hlediska spíše na úrovních odpovídajícím kladným hodnotám.

2.2 Klasifikační vektor s částečnou informací

V situaci částečné informace vycházíme z předpokladu, že investor zná průměr a rozptyl, ale vůbec nemá povědomost o pravděpodobnostech vyžadovaných při výpočtu obou složek rizika. K vyřešení situace poslouží obecná forma Čebyševovy

6 *PRV* = Prospect (or Portfolio) Ranking Vector

nerovnosti (Rényi, 1972), jejíž použití má ale negativní dopad na hodnověrnost řešení. Stanovíme si hodnoty k_i

$$k_i = \frac{S - \overline{x_i}}{\sigma_i}, \tag{12}$$

kde $S = \max_i(\overline{x_i} + k\sigma_i)$,

$\overline{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{s}(x_j)}{s}$ je průměrný výnos *i-tého* investičního instrumentu a

$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{s}(x_j - \overline{x_i})^2}{s}}$ je směrodatná odchylka výnosů *i-tého* investičního instrumentu.

Dále definujeme hodnotu k'_{im} dle vztahu

$$k'_{im} = \frac{t_m - \overline{x_i}}{\sigma_i}, \tag{13}$$

kde $L = \max_i(\overline{x_i} - k'\sigma_i)$,

$t_m = \max(L; r_m)$.

Zajímáme se vždy o pravděpodobnost odchýlení výnosů od jejich středních hodnot pouze v jednom směru, první a třetí člen klasifikačního vektoru stanovujeme následujícím způsobem (více viz Zelený, 2005). Tedy pro třetí komponentu vektoru bude platit

$$1 - R_i^{(2)} = P(X_i \geq S) = P(X_i \geq \overline{x_i} + k_i\sigma_i) \leq \frac{1}{k_i^2 + 1}. \tag{14}$$

Pro první část rizika platí

$$R_{im}^{(1)} = P(X_i \leq \overline{x_i} + k'_{im}\sigma_i) \geq \frac{1}{k'^2_{im} + 1}. \tag{15}$$

První komponentu klasifikačního vektoru lze vyjádřit ve tvaru

$$1 - R_{im}^{(1)} = P(X_i \geq \overline{x_i} + k'_{im}\sigma_i) \leq 1 - \frac{1}{k'^2_{im} + 1}. \tag{16}$$

Nakonec stanovíme klasifikační vektor portfolia pro *i-tý* investiční instrument (*i-tou* variantu) *m-tého* investora (*m-tého* rozhodovatele) pomocí limitů na pravých stranách vztahů (14) a (16)[7]

$$PRV_{im} \overset{P}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{k_{im}^{'2}+1}, \overline{x_i}, \frac{1}{k_i^2+1} \right), \tag{17}$$

kde $\overset{P}{\Leftrightarrow}$ označuje pravděpodobnostní implikaci, tedy vztah platící s určitou pravděpodobností, nikoliv s jistotou (Grzegorzewski, 2011).

V analogii se stochastickou dominancí můžeme stanovit pravidla k určení dominance ve smyslu PRV. Tak tedy varianta *p* dominuje variantu *q* v duchu PRV právě tehdy, je-li

$$\begin{aligned} &[a] \quad p \underset{PRV_1}{\succ} q \overset{P}{\Leftrightarrow} \frac{1}{k_{pm}^{'2}+1} \geq \frac{1}{k_{qm}^{'2}+1}, \\ &[b] \quad p \underset{PRV_2}{\succ} q \Leftrightarrow \overline{x_p} \geq \overline{x_q}, \\ &[c] \quad p \underset{PRV_3}{\succ} q \overset{P}{\Leftrightarrow} \frac{1}{k_p^2+1} \geq \frac{1}{k_q^2+1}, \end{aligned} \tag{18}$$

kde alespoň jedna nerovnost musí být splněna jako ostrá[8]. Zdůrazňujeme, že koncept PRV dominance není v žádném případě v rozporu s přístupem stochastické dominance prvního řádu, nedá se však chápat jako jeho ekvivalence.

Jak jsme si mohli povšimnout, výše zmíněný koncept dominance velmi závisí na hodnotách stanovených investorem (rozhodovatelem) r_m, k a $k^{'}$. Jako minimální akceptovatelný výnos *m-tým* investorem označujeme r_m. Blíže se však zaměříme na další dvě zmíněné hodnoty. Velikost konstant *k* a *k'* závisí na důvěře investora ve výskyt extrémních hodnot výnosů mezi různými dostupnými variantami. Čím budeme uvažovat větší hodnoty pozitivně odchýlených od průměru, tím budou hodnoty *k* a *1/k'* nabývat vyšších hodnot. Naopak u pesimistického pohledu budou hodnoty *1/k* a *k'* vysoké. „Hyperoptimistický“ investor volí $k = \infty$ a $k' = 0$, naopak „hyperpesimistický“ stanovuje hodnoty $k' = \infty$ a $k = 0$.

7 Platí pro $k_{im}^{'} > 0$.

8 Nerovnosti platí pro $k_{pm}^{'}, k_{qm}^{'} > 0$.

3. Interaktivní metoda vícekriteriálního rozhodování

K nalezení uspokojivé struktury investičního portfolia využijeme interaktivní přístup vícekriteriálního programování. Vstupní informací od rozhodovatele jsou váhy jednotlivých kritérií, které jsou určeny pomocí Saatyho metody (více viz Saaty, 1980 či Fiala, 2008). Dále musí rozhodovatel stanovit aspirační úrovně pro kritéria, tedy minimální požadované úrovně pro maximalizační kritéria a maximální požadované úrovně pro minimalizační kritéria. Analytik[9] nabízí řešení, které rozhodovatel (investor) posuzuje a případně žádá vylepšení hodnoty některého z kritérií. Obdobný proces můžeme vidět u známé metody STEM (více viz Benayoun a kol., 1971).

Nyní si interaktivní metodu vícekriteriálního programování blíže popíšeme. Budeme řešit úlohu, která je založena na maximalizaci vzdálenosti hodnot kritérií od jejich aspiračních úrovní, což vyjádříme pomocí eukleidovské metriky (Zelený, 2005). Tedy

$$
\begin{aligned}
& z = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} [w_i (f_i^*(x) - f_i(x))]^2} \rightarrow \max \\
& x \in X^1 = \left\{ x \in R^n; f_i(x) \geq f_i^*(x), i \in A; f_i(x) \leq f_i^*(x), i \in B; A \cup B = \{1,2,\ldots,k\} \right\} \\
& x \in X^2 = \left\{ x \in R^n; g_l(x) \leq b_l, l = 1,2,\ldots,m; x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \right\},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

kde $f_i(x)$ je *i-tá* kriteriální funkce ($i = 1,2,...,k$), jejíž váha je označena w_i, $f_i^*(x)$ vyjadřuje limitní (aspirační) úroveň *i-tého* kritéria, *x* zase *n*-složkový vektor proměnných, $g_l(x)$, resp. b_i reprezentuje levou, resp. pravou stranu některých vlastních omezení, kterých je *m*, *A* je množina obsahující indexy kritérií maximalizační povahy a *B* je množina obsahující indexy kritérií minimalizační povahy. V případě nesrovnatelnosti kritérií je třeba data normalizovat (více viz Fiala, 2008).

Množina X^1 spoluvytvářející množinu přípustných řešení obsahuje vyjádření požadovaných minimálních či maximálních úrovní (podle typu kritéria) kriteriálních funkcí. Množina X^2 obsahuje ostatní vlastní a všechny nevlastní omezení modelu. Sjednocením obou množin dostáváme celkovou množinu přípustných řešení dané úlohy. Podle konkrétní situace se samozřejmě model může rozšířit o další proměnné například binárního charakteru.

Než se pustíme do živé interakce mezi rozhodovatelem a analytikem, podíváme se na přístup ke stanovení aspiračních úrovní. Sestavíme takový matematický model, který bude optimalizovat hodnotu konkrétní kriteriální funkce na množině X^2:

$$
\begin{aligned}
& f_i(x) \rightarrow \max\ (\min) \\
& x \in X^2 = \left\{ x \in R^n; g_l(x) \leq b_l, l = 1,2,\ldots,m; x_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n \right\}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

9 *Analytik* podporuje rozhodovací proces z hlediska zpracování preferenčních informací rozhodovatele a předkládá řešení.

Optimální hodnota příslušného kritéria je vodítkem pro stanovení aspirační úrovně. Jinými slovy udává u maximalizačního kritéria její horní hodnotu a u minimalizačního kritéria její dolní hodnotu. Je evidentní, že rozhodovatel bude volit aspirační úrovně podstatně nižší, resp. vyšší, které by nevylučovaly v rozhodovací úloze existenci přípustného řešení. V případě stochastického problému o několika scénářích se stává vodítkem pro stanovení aspiračních úrovní průměrná hodnota účelových funkcí všech úloh.

Po sestrojení modelu analytik nabízí optimální řešení úlohy. Pokud se rozhodovateli nelíbí ani jedna hodnota vektoru proměnných x v souvislosti s dosaženými hodnotami jednotlivých kritérií, proces končí nezdarem, rozhodovatel musí přehodnotit své preference. V případě nespokojenosti jen s některými kritérii dochází k úpravě[10]

$$
\begin{aligned}
& z=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}[w_i(f_i^*(x)-f_i(x))]^2} \rightarrow \max \\
& x\in X^1=\left\{x\in R^n; f_i(x)\le f_i^*(x), i\in A; f_i(x)\ge f_i^*(x), i\in B; A\cup B=\{1,2,\dots,k\}\right\} \\
& x\in X^2=\left\{x\in R^n; g_l(x)\le b_l, l=1,2,\dots,m, x_j\ge 0; j=1,2,\dots,n\right\} \\
& x\in X^3=\left\{x\in R^n, f_i^N(x)\ge \overline{f_i^N}+\Delta_i, i\in A^N, A^N\subseteq A; f_i^N(x)\le \overline{f_i^N}-\Delta_i, i\in B^N, B^N\subseteq B\right\}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

Množina X^3 obsahuje požadované úpravy rozhodovatelem vybraných kritérií (označené horním indexem N). U konkrétních maximalizačních kritérií $f_i^N(x)$ požaduje zvýšit neuspokojivou hodnotu $\overline{f_i^N}$ o Δ_i, u vybraných minimalizačních kritérií $f_i^N(x)$ chce naopak snížit neuspokojivou hodnotu $\overline{f_i^N}$ o Δ_i. Množina A^N zahrnuje všechny indexy maximalizačních kritérií, s jejichž hodnotami není rozhodovatel spokojen, množina B^N pak indexy všech minimalizačních kritérií, s jejichž hodnotami není spokojen.

K úpravě řešení nemusí dojít jen v případě, že rozhodovatel není striktně nespokojen s řešením, nýbrž i v situaci, kdy chce mít informativní představu, jak by se řešení změnilo, pokud by si dovolil požádat o vylepšení hodnoty některých kriteriálních funkcí. Jak je patrné, rozhodovatel neklade při vylepšování příslušných hodnot žádné požadavky na velikost možného zhoršení ostatních kritérií, které jsou z pohledu investora hodnotově v pořádku. Tímto způsobem algoritmus pokračuje až do okamžiku, kdy je rozhodovatel spokojen či smířen s podobou řešení.

4. Stochastický charakter modelu

Modely matematického programování můžeme rozdělit podle povahy proměnných a faktorů na deterministické a stochastické. V deterministických modelech jsou všechny proměnné a faktory predeterminovány, explicitně dány. Pokud nechceme akceptovat

10 Například některá kritéria dosahují „pouze“ svých aspiračních úrovní, což může být pro rozhodovatele ne zcela uspokojivé.

v mnoha případech zjednodušení problému, zahrnujeme do modelu náhodnostní charakter, který se projevuje neúplnou informací o hodnotách parametrů modelu. Optimální řešení, resp. hodnota účelové funkce zkoumaného problému pak závisí na realizaci přítomných náhodných veličin (Hadley, 1964 či Golbin, 2003), formálně zapsáno

$$\begin{aligned} x_1 &= f(\omega) \\ x_2 &= f(\omega) \\ &\vdots \\ x_n &= f(\omega), \end{aligned} \tag{22}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou neznámé proměnné a ω zastupuje stochastický charakter v modelu[11].

Prakticky budeme řešit stochastické modely v duchu optimalizace pomocí metody Monte Carlo, kdy budeme generovat postupně náhodná čísla konkrétních pravděpodobnostních rozdělení příslušných náhodných veličin, čímž dostaneme různé scénáře. Každému scénáři odpovídá určitá hodnota účelové funkce modelu. Generování scénářů omezíme předem stanoveným počtem. Čím vyšší bude tento počet, tím širší a přesnější obrázek o daném řešení úlohy dostaneme. Vybereme takové řešení, které vykazuje největší hodnotu sledované účelové funkce (Dlouhý a kol., 2007, popř. Shapiro, 2009).

5. Cílové programování – nedělitelnost aktiv

Mnohdy se může stát, že výsledná struktura portfolia nakonec nemůže být zcela dodržena, protože obchod s příslušnými investičními instrumenty probíhá pouze ve standardizovaných jednotkách o aktuální tržní hodnotě. Jinými slovy musíme dodržovat podmínku nedělitelnosti aktiv. Požadavku obchodu ve standardizovaných jednotkách vyhovuje následující model, který upravuje „optimální" strukturu portfolia

$$\begin{aligned} & z = \sum_{i=1}^{n} (d_i^+ + d_i^-) \to \min \\ & c_i b_i + d_i^- - d_i^+ = M x_i^* \quad i = 1,2\ldots,n \\ & \sum_{i=1}^{n} c_i b_i \le M \\ & d_i^+ d_i^- = 0 \quad i = 1,2\ldots,n \\ & d_i^+, d_i^- \ge 0 \quad i = 1,2\ldots,n \\ & b_i \in Z_0^+ \quad i = 1,2\ldots,n, \end{aligned} \tag{23}$$

11 V praktické aplikaci zaujímá stochastický charakter modelu *výkonnost* podílových fondů, potažmo *Sharpeho index*.

kde c_i je cena za standardizovanou jednotku *i-tého* investičního instrumentu, b_i označuje počet standardizovaných jednotek *i-tého* investičního instrumentu, celková zamýšlená investovaná částka je vyjádřena jako M, x_i^* je původní podíl *i-tého* investičního instrumentu na portfoliu dle rozhodovací procedury, konečně d_i^-, resp. d_i^+ reprezentuje zápornou, resp. kladnou odchylku od původního podílu *i-tého* investičního instrumentu na portfoliu.

Lze si povšimnout, že modelovaný proces je založen na konceptu cílového programování (více viz Kosmidou et al., 2004). Nevýhodou modelu je skutečnost, že nová struktura portfolia se někdy může poměrně významně lišit od původní, která byla stanovena na základě interaktivní rozhodovací procedury zahrnující určité investorovy požadavky na portfolio. Nová skladba portfolia tak může původní požadavky porušovat. Zde tedy evidujeme určité zjednodušení situace, která by si ještě zasloužila hlubší propracování. V případě praktické aplikace s vybranými podílovými fondy popsaný problém významně nenastává, protože podílové listy vybrané pomocí principu stochastické dominance se obchodují po kusech a jejich cena se pohybuje kolem jedné koruny české.

6. Sestavení portfolia podílových fondů

V konkrétní praktické aplikaci v prostředí kapitálového trhu s otevřenými podílovými fondy nabízenými Investiční společností České spořitelny využijeme výše popsané metody při vytváření „optimální“ struktury investičního portfolia.

6.1 Požadavky a preference investora

Zaprvé si investující subjekt přeje, aby v portfoliu byly zastoupeny všechny čtyři skupiny podílových fondů, přesněji aby byl vybrán z každé skupiny jeden zástupce. Zároveň ale musí platit, aby investice do jednoho podílového fondu nepřesáhla 30 % portfolia. Investovaná částka nepřesáhne 100 000 Kč. Dále sleduje určité investiční ukazatele, jako je modifikovaná durace či Sharpeho index výsledného portfolia. Modifikovanou duraci vypočítáme podle vzorce (Málek, 2003)

$$D_M = \frac{dP}{di}\frac{1}{P}, \tag{24}$$

kde P je cena úrokového investičního instrumentu a i je tržní úroková míra. Modifikovaná durace měří úrokové riziko. Vyjadřuje citlivost ceny úrokového cenného papíru na pohyb tržních úrokových měr. Také lze říci, že se jedná o kvantifikaci průměrné doby trvání, než investor obdrží veškeré budoucí příjmy z úrokového cenného papíru (Veselá, 2011). Tento ukazatel je měřen jen u podílových fondů, který obsahuje ve svém portfoliu úrokové investiční instrumenty, tedy dluhopisy. Jedná se o některé podílové fondy smíšené, dále dluhopisové a peněžního trhu. Investor stanovuje maximální velikost modifikované durace pro celé portfolio na hladině 2,5.

Sharpeho index stanovíme dle (Gordon a kol., 1989) následujícím vztahem

$$I_{Sharpe} = \frac{E(x) - r_f}{\sigma}, \tag{25}$$

kde $E(x)$ je očekávaná míra výnosu (průměrný výnos), r_f je bezriziková výnosová míra[12] a σ je směrodatná odchylka výnosů. Tento index měří výkonnost konkrétního investičního instrumentu s ohledem na jeho rizikovost. Investor stanovuje minimální hodnotu indexu na 0,1.

Dále stanovuje hodnotící kritéria. Bude jimi výkonnost (výnos), riziko a náklady portfolia. Kriteriální funkci výnosu, resp. nákladů portfolia stanovíme vztahy

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{i=1}^{n} v_i x_i, \\ resp.\ f_3(x) &= \sum_{i=1}^{n} n_i x_i, \end{aligned} \tag{26}$$

kde v_i je měsíční výkonnost *i-tého* podílového fondu, n_i jsou náklady spojené s investicí do *i-tého* fondu a x_i označuje podíl *i-tého* fondu na portfoliu. Riziko portfolia stanovíme na základě (Sharpe, 1970) jako

$$f_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}, \tag{27}$$

kde σ_{ij} je kovariance, která vyjadřuje lineární závislost mezi výnosovými měrami *i-tého* a *j-tého* podílového fondu a lze ji vypočítat dle vztahu

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^{p} (x_{il} - \overline{x_i})(x_{jl} - \overline{x_j})}{p}, \tag{28}$$

kde x_{il}, resp. x_{jl} je výnosová míra *i-tého*, resp. *j-tého* podílového fondu v rámci sledovaného období[13], $\overline{x_i}$, resp. $\overline{x_j}$ pak průměrná výnosová míra *i-tého*, resp. *j-tého* podílového fondu.

Důležitost kritérií investor vyjadřuje pomocí vah stanovených Saatyho metodou (tabulka 2).

12 Bezriziková výnosová míra je stanovena jako úrokový výnos spojený s půlroční pokladniční poukázkou vydanou 2. 12. 2011 v rámci emise *SPP 26T 7mld. 02/12*.

13 Sledované období je stanoveno od 1. 4. 2009 do 1. 12. 2011. Toto období muselo být u smíšených fondů *Osobní portfolio 4* a *Plus* zkráceno z důvodu jejich pozdějšího vzniku.

Tabulka 2
Váhy jednotlivých kritérií

Výnos	Riziko	Náklady
0,642	0,292	0,066

Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel.

6.2 Rozhodovací procedura

Nejdříve redukujeme počet potenciálních investic do otevřených podílových fondů pomocí konceptu stochastické dominance prvního řádu. Podle Kolgomorova-Smirnovova testu (více viz Hindls a kol., 2006 či Rényi, 1972)[14] můžeme konstatovat, že výnosy většiny podílových fondů mohou být popsány normálním pravděpodobnostním rozdělením[15]. Pouze u fondů Sporoinvest, Korporátní dluhopisový, High Yield dluhopisový, Fond řízených výnosů a Sporotrend se jeví jako vhodnější rozdělení logistické[16]. Po stanovení všech vstupních údajů $(k = k' = 1, r_m$ dle průměrných výnosů) využijeme princip stochastické dominance v každé skupině podílových fondů, abychom redukovali velkou množinu investičních příležitostí. V případě znalosti pravděpodobnostních rozdělení sledovaných veličin vychází vybraná množina totožně jako v situaci částečné informace. Dle výše zmíněných principů (10), (11) či (18) jsme tedy vybrali následující podílové fondy (tabulka 3).

Tabulka 3
Podílové fondy vybrané pomocí principu stochastické dominance prvního řádu

Fondy peněžního trhu	Smíšené fondy	Dluhopisové fondy	Akciové fondy
Sporoinvest	*Akciový MIX*	*High Yield dluhopisový*	*Sporotrend* *Top Stocks*

Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel.

6.3 Data

Než přejdeme k samotné interaktivní proceduře výběru investičního portfolia, představíme některá důležitá data k vybraným otevřeným podílovým fondům prostřednictvím konceptu stochastické dominance prvního řádu.

14 *Kolgomorovův-Smirnovův tes*t byl proveden v softwaru *Crystal Ball* v rámci prostředí MS EXCEL.

15 *Normální rozdělení* je spojité pravděpodobnostní rozdělení se dvěma parametry, střední hodnotou μ a rozptylem σ^2.

16 *Logistické rozdělení* je spojité pravděpodobnostní rozdělení se dvěma parametry, střední hodnotou a parametrem měřítka.

Tabulka 4 poskytuje informace o nákladech spojených s investicí do vybraných podílových fondů a také modifikovanou duraci u fondů, které obsahují dluhopisy.

Tabulka 4
Náklady a modifikovaná durace vybraných otevřených podílových fondů

Podílový fond	Náklady (%)	Modifikovaná durace (rok)
Sporoinvest	0,3	1,55
Akciový MIX	3	x
High Yield dluhopisový	1	3,27
Sporotrend	3	x
Top Stocks	3	x

Pramen: Internetové stránky Investiční společnosti České spořitelny[17].

Pro stanovení rizika potřebujeme znát kovariance výnosů podílových fondů (tabulka 5).

Tabulka 5
Kovariance výnosů vybraných otevřených podílových fondů

	Sporoinvest	*Akciový MIX*	*High Yield dluhopisový*	*Sporotrend*	*Top Stocks*
Sporoinvest	0,075	0,729	0,962	1,591	1,115
Akciový MIX	0,729	20,535	17,209	43,888	35,294
High Yield dluhopisový	0,962	17,209	21,246	44,960	30,494
Sporotrend	1,591	43,888	44,960	233,684	82,255
Top Stocks	1,115	35,294	30,494	82,255	74,876

Pramen: Vlastní zpracování prostřednictvím programu SPSS.

Nakonec uvádíme pravděpodobnostní rozdělení výnosů jednotlivých podílových fondů, na základě kterých budeme generovat scénáře (tabulka 6).

17 Portál http://www.iscs.cz, 2012.

Tabulka 6
Pravděpodobnostní rozdělení výnosů vybraných otevřených podílových fondů

Podílový fond	Rozdělení	Mean	St. dev.	Scale
Sporoinvest	logistické	0,131	x	0,135
Akciový MIX	normální	0,841	4,460	x
High Yield dluhopisový	logistické	1,179	x	2,372
Sporotrend	logistické	1,561	x	7,641
Top Stocks	normální	2,615	8,517	x

Pramen: Vlastní zpracování na základě výsledků z Crystal Ball.

6.4 Aplikace interaktivní metody vícekriteriálního programování

Jak již bylo zmíněno výše, nachází se v modelu náhodná veličina – (měsíční) výkonnost (výnos) podílových fondů. Vygenerujeme si třicet možných scénářů pomocí generátoru náhodných čísel příslušných pravděpodobnostních rozdělení[18] a budeme řešit dle (19), potažmo (23), matematický model[19], který bude základem pro použití interaktivní metody vícekriteriálního programování. V tomto případě bez nutnosti normalizace hodnot platí

$$z = \sqrt{\left[0{,}642\left(1{,}17 - \sum_{i=1}^{5} v_i x_i\right)\right]^2 + \left[0{,}292\left(6{,}32 - \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_i x_j \sigma_{ij}}\right)\right]^2 + \left[0{,}066\left(2{,}69 - \sum_{i=1}^{5} n_i x_i\right)\right]^2} \downarrow \max$$

za podmínek

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} v_i x_i &\geq 1{,}17 \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_i x_j \sigma_{ij}} &\leq 6{,}32 \\ \sum_{i=1}^{5} n_i x_i &\leq 2{,}69 \end{aligned}\right\} X^1$$

18 Ke generování náhodných čísel byly využity funkce programu *SPSS* a *MS EXCEL*.

19 Všechny použité optimalizační modely byly řešeny v modelovacím systému *LINGO*.

$$\left.\begin{array}{c}
\dfrac{\sum_{i=2}^{3} d_i x_i}{\sum_{i=2}^{3} x_i} \leq 2{,}5 \\
\sum_{i=1}^{5} s_i x_i \geq 0{,}1 \\
\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 \\
x_i \leq 0{,}3 y_i \quad i = 1,2,\ldots,5 \\
y_i = 1 \quad i = 1,2,3 \\
\sum_{i=4}^{5} y_i = 1 \\
x_i \geq 0 \quad i = 1,2,\ldots,5 \\
y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,\ldots,5
\end{array}\right\} X^2,$$

kde x_i je podíl *i-tého* podílového fondu na portfoliu[20], y_i označuje (ne)investici do *i-tého* podílového fondu, v_i reprezentuje měsíční výnos (výkonnost) *i-tého* podílového fondu, n_i označíme náklady spojené s investicí do *i-tého* podílového fondu, d_i je modifikovaná durace *i-tého* podílového fondu obsahující dluhopisy, s_i značí Sharpeho index *i-tého* podílového fondu, σ_{ij} je kovariance výnosů *i-tého* a *j-tého* podílového fondu.

Účelová funkce maximalizuje součet odchylek od aspiračních úrovní jednotlivých kritérií, množina X^1 obsahuje omezení na splnění minimálních (maximálních) požadovaných úrovní kritérií, množina X^2 pak zahrnuje požadavky na velikost modifikované durace u podílových fondů obsahující dluhopisy a Sharpeho index portfolia, stejně tak na diverzifikaci portfolia a počet podílových fondů. Dále obsahuje nezbytné podmínky nezápornosti, resp. binarity pro příslušné proměnné. Aspirační úrovně jsou stanoveny přibližně na třetině optimálních hodnot maximalizačních kritérií a pěti třetinách optimálních hodnot minimalizačních kritérií dle konkrétní úlohy (20).

6.5 Zakončení procedury

Pro některé scénáře nebylo nalezeno ani přípustné řešení, nebylo tedy možné na základě investorových preferencí sestavit výsledné portfolio. Na základě jednotlivých scénářů dostáváme investiční portfolia s výnosem od -1% do 8,5%, rizikem 3,5% až 6% a náklady kolem 1,6%. Po prvotní optimalizaci úlohy dostáváme následující strukturu

20 $i=1$ (Sporoinvest), $i=2$ (Akciový MIX), $i=3$ (High Yield dluhopisový), $i=4$ (Sporotrend), $i=5$ (Top Stocks).

portfolia (tabulka 7), tedy složení vykazující nejvyšší hodnotu sledované účelové funkce (nejmenší vzdálenost od aspiračních úrovní) ze všech vygenerovaných scénářů.

Tabulka 7
Skladba portfolia před úpravami

Podílový fond	Podíl	Kritéria	Hodnoty
Akciový MIX	***10%***	Výnos	8,4%
Sporoinvest	***30%***		
High Yield	***30%***	Riziko	5,95%
Sporotrend	***30%***		
Top Stocks	***0%***	Náklady	1,59%

Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel na základě výstupu z programu LINGO.

Budoucího investora velmi těší výnos investice, který vysoce převyšuje zvolenou aspirační úroveň. Zaměřuje se tedy na riziko, které by si přál snížit alespoň na hodnotu 5,5 %. Podle (21) analytik nabízí upravené řešení (tabulka 8).

Tabulka 8
Výsledné portfolio

Podílový fond	Podíl	Kritéria	Hodnoty
Akciový MIX	***14%***	Výnos	7,47%
Sporoinvest	***30%***		
High Yield	***30%***	Riziko	5,5%
Sporotrend	***26%***		
Top Stocks	***0%***	Náklady	1,59%

Pramen: Vlastní zpracování v MS Excel na základě výstupu z programu LINGO.

Kromě požadované změny rizika se snížil o více než jeden procentní bod výnos. Tato změna je pro investora přijatelná a ještě žádá snížení o 0,5 procentního bodu rizika. Při tomto snížení opět rapidně klesá výnos (cca na úroveň 6,4 %). Investor se tedy rozhoduje, že na tuto změnu již nepřistoupí a spokojí se s řešením předešlým (viz tabulku 8), které samozřejmě dle (23) respektuje nedělitelnost obchodovaných aktiv. Je třeba připomenout, že výsledné řešení vykazuje pravděpodobnostní charakter.

Závěr

Cílem článku bylo seznámení čtenáře s principem stochastické dominance, navrhnutí interaktivní metody vícekriteriálního programování na základě kombinace známých přístupů a zejména představení praktické aplikace popsaných metodických postupů na kapitálovém trhu při vytváření investičního portfolia otevřených podílových fondů. Princip stochastické dominance využíváme jako nástroj hodnocení variant vhodný pro redukci velmi mohutné množiny alternativ. Pro stanovení „optimální" struktury portfolia aplikujeme metodu vícekriteriálního programování, kdy v průběhu dochází postupně k úpravě řešení až do podoby rozhodovatelem přijatelné. V duchu praktické aplikace neopomineme zahrnout do rozhodovací procedury stochastický charakter. Na závěr stanovujeme výslednou skladbu portfolia podílových fondů Investiční společnosti České spořitelny v podobě: 14 % Akciový MIX, 30 % Sporoinvest, 30 % High Yield dluhopisový a 26 % Sporotrend.

Literatura

BENAYOUN, R.; MONTGOLFIER, J.; TERGNY, J.; LARICHEV, O. Linear Programming with Multiple Objective Functions: STEP Method (STEM). *Mathematical Programming*. 1971, no. 1, s. 366–375.

DLOUHÝ, M.; FÁBRY, J.; KUNCOVÁ, M.; HLADÍK, T. *Simulace podnikových procesů*. 1. vyd. Brno : Computer Press, 2007. ISBN 978-80-251-1649-4.

FIALA, P. *Modely a metody rozhodování*. 1. vyd. Praha : VŠE, Nakladatelství Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1345-4.

GOLBIN, V. V. *Decision Making and Programming*. 1. ed. New York : World Scientific Publishing Company, 2003. ISBN 978-9812383792.

GORDON, J. A.; SHARPE, W. F. *Fundamentals of Investments*. 1. ed. New Jersey : Prentice Hall, 1989. ISBN 0-13-340167-7.

GRZEGORZEWSKI, P. Probabilistic Implications. Příspěvek prezentovaný na konferenci EUSFLAT-LFA, Aix-les-Bains, 2011.

HADLEY, G. *Nonlinear and Dynamic programming*. 1. ed. USA : Addison-Wesley Publishing Company, 1964. ISBN 0-201-02664-3.

HINDLS, R.; HRONOVÁ, S.; SEGER, J.; FISCHER, J. *Statistika pro ekonomy*. 7. vyd. Praha : Professional Publishing, 2006. ISBN 80-86946-16-9.

KOSMIDOU, K.; ZAPOUNDIS, C. *Goal Programming Techniques for Bank Asset Liability Management*. 1. ed. Norwell : Luwer Academic Publishers, 2004. ISBN 1-4020-8104-9.

LEY, H. *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty (Studies in Risk and Uncertainty)*. 2. ed. USA : Springer, 2010. ISBN 978-1441939838.

MÁLEK, J. *Risk Management (Vybrané kapitoly)*. 1. vyd. Praha : VŠE, 2003. ISBN 80-245-0633-5.

MLYNAROVIČ, V. *Finančné investovanie – teórie a aplikácie*. 1. vyd. Bratislava : Ekonómia, 2011. ISBN 80-89047-16-5.

Portál www.iscs.cz. 2012. *Podílové fondy, modifikovaná durace* [online, 30. 5. 2012]. www.iscs.cz/web/fondy.

Portál www.iscs.cz. 2012. *Poplatky* [online, 30. 5. 2012]. www.csas.cz/banka/content/inet/internet/cs/RR_SK.VIII..xml.

RACHEV, S. T.; STOYANOV, S. V.; FABOZZI, S. J. *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization: The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures*. 1. ed. New York : Wiley, 2008. ISBN 978-0470053164.

RÉNYI, A. *Teorie pravděpodobnos*ti. 1. vyd. Praha : Academica, 1972.

SAATY, T. L. *The Analytic Hierarchy Process*. 1. ed. USA : McGraw-Hill, 1980. ISBN 0-07-054371-2.

Sbírka zákonů ÚZ č. 851 *Cenné papíry, Kapitálový trh*. 1. vyd. Ostrava : Sagit, 2011. ISBN 978-80-7208-871-3.

SHAPIRO, A.; DENTCHEVA, D.; RUSZCZYŃSKY, A. *Lectures on Stochastic Programming (Modeling and Theory)*. 1. ed. Philadelphia : Mathematical Programming Society, 2009. ISBN 978-0-898716-87-0.

SHARPE, W. F. *Portfolio Theory and Capital Markets*. 1. ed. USA : McGraw-Hill, 1970. ISBN 07-056487-6.

VALACH, J. *Investiční rozhodování a dlouhodobé financování*. 2. přeprac. vyd. Praha : Ekopress, 2006. ISBN 80-86929-01-9.

VESELÁ, J. *Investování na kapitálových trzích*. 2. rozš. a aktual. vyd. Praha : Wolters Kluwer ČR, 2011. ISBN 978-80-7357-647-9.

ZELENÝ, M. *Human Systems Management - Integrating Knowledge, Management and Systems*. 1. ed. New Jersey : World Scientific Publishing, 2005. ISBN 978-9810249137.

ANALYSIS OF THE CAPITAL MARKET VIA STOCHASTIC DOMINANCE AND MULTI-CRITERIA INTERACTIVE METHOD

Abstract: Two levels can be identified in the article. The first one is related to a theoretical introduction to the known stochastic dominance approach and the interactive multi-objective programming method; in the second we apply the aforesaid quantitative approaches to making an "optimal" portfolio structure of shares funds. We use the draft of stochastic dominance for a reduction in a relatively huge set of investment opportunities. The application of the stochastic dominance principle is determined by the stochastic character of the studied problem. The yield rate of shares funds is stated as a random variable. We also apply the Monte Carlo method in the investment decision-making procedure. For finding an „optimal" portfolio form, we use the interactive multi-criteria programming method, the computational algorithm of which is based on maximization of positive deviation from aspiration levels of separate objective functions (criteria). After all the procedures, including successive revision of solutions offered by analysts according to decision-maker preferences, we obtain a final portfolio form of shares funds.

Keywords: portfolio, decision-making, stochastic dominance

JEL Classification: C44, C61, G11